I. تعاريف :

1. مبرهنة وتعريف :

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ وتحقق ما يلي :

أ. تحتوي المجموعة $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i بحيث : $\boxed{i^2 = -1}$

ب. كل عنصر من المجموعة $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $a+ib$ بحيث a و b عددان حقيقيان.

ج. المجموعة $\mathbb{C}$ ؛ مزودة بعمليتي الجمع والضرب؛ تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.

المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية. i est dit nombre de Gauss

مثال : نعتبر العددين العقديين : $z=4+5i$ و $z'=2+3i$. أحسب $z+z'$ و zz' .

2. تعاريف :

i. لدينا : $\forall z \in \mathbb{C} \quad ; \quad \exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad z=a+ib$

أي : $\mathbb{C}=\{a+ib \quad / \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

ii. الكتابة $z=a+ib$ ، حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، تسمى : الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد العقدي z .

iii. العدد الحقيقي a يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي z ، ويرمز له بالرمز $\Re e(z)$ ، ونكتب : $a=\Re e(z)$.

iv. العدد الحقيقي b يسمى **الجزء التخيلي** للعدد العقدي z ، ويرمز له بالرمز $\Im m(z)$ ، ونكتب : $b=\Im m(z)$.

v. العدد العقدي ib ، حيث $b\in\mathbb{R}$ ، يسمى عددا تخيليا صرفا .
مجموعة هذه الأعداد يرمز لها بالرمز $i\mathbb{R}$. لدينا : $i\mathbb{R}=\{ib \quad / \quad b\in\mathbb{R}\}$

$$z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists! b\in\mathbb{R} \quad / \quad z=ib$$

مثال : حدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد العقدية التالية :

(a $z=5+8i$ (c $z=1-2i$ (e $z=-3+i$

(b $z=7$ (d $z=-4i$ (f $z=(2+i)i$

3. تساوي عددين عقديين :

خاصية :

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ عددين عقديين حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a',b')\in\mathbb{R}^2$.

$$z=z' \Leftrightarrow [a=a' \quad \text{و} \quad b=b']$$

$$z=z' \Leftrightarrow [\Re e(z)=\Re e(z') \quad \text{و} \quad \Im m(z)=\Im m(z')]$$

ملاحظات :

أ. $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad z=0 \Leftrightarrow [\Re e(z)=0 \quad \text{و} \quad \Im m(z)=0]$

ب. $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Im m(z)=0$

ج. $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re e(z)=0$

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{C}$:

1. خاصية :

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ عددين عقديين ، حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a',b')\in\mathbb{R}^2$ ؛ و $\alpha\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$\boxed{z+z'=(a+a')+i\,(b+b')}$$

$$\boxed{zz'=(aa'-bb')+i\,(ab'+a'b)}$$

$$\boxed{\alpha z=(\alpha a)+i\,(\alpha b)}$$

2. متطابقات هامة :

ليكن z و z' عددين عقديين .

لدينا :

$$\boxed{(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2}$$

$$\boxed{(z-z')^2=z^2-2zz'+z'^2}$$

$$\boxed{(z+z')(z-z')=z^2-z'^2}$$

ولدينا :

$$\boxed{(z+z')^3=z^3+3z^2z'+3zz'^2+z'^3}$$

$$\boxed{(z-z')^3=z^3-3z^2z'+3zz'^2-z'^3}$$

$$\boxed{z^3-z'^3=(z-z')(z^2+zz'+z'^2)}$$

ملاحظة :

ليكن a و b عددين حقيقيين . لدينا :

$$\boxed{(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2}$$

$$\boxed{(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab}$$

$$\boxed{(a-ib)^2=a^2-b^2-2iab}$$

تمرين تطبيقي :

1. أحسب : $(1+i)^2$ و $(1-i)^2$.
2. نضع : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   a. أحسب j^2 ثم $1+j+j^2$.
   b. استنتج قيمة j^3 ثم استنتج قيمة j^{2005} . j est dit nombre de Jacobi .
3. أكتب على الشكل الجبري ما يلي :
   $(a$ $z=\frac{-5+i}{3+2i}$ $(b$ $z=\frac{2-3i}{1-i}$ $(c$ $z=\frac{i}{j^2}$
4. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $\frac{z+1}{z-1}=2i$.

3. قوى العدد i :

لدينا : $\boxed{i^2=-1}$ و $\boxed{i^3=-i}$ و $\boxed{i^4=1}$. إذن :

$\forall n\in\mathbb{Z}:$ $\boxed{i^{4n}=1}$ $\boxed{i^{4n+1}=i}$ $\boxed{i^{4n+2}=-1}$ $\boxed{i^{4n+3}=-i}$

مثال : أحسب :

a) i^{2006} .

b) $S=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2005}$.

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

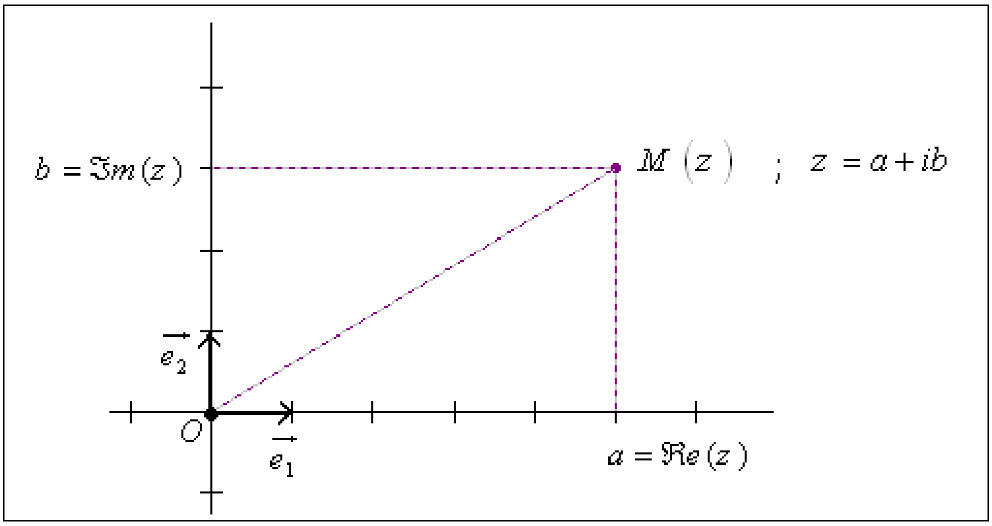
المستوى $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1. صورة عدد عقدي – لحق نقطة : Image –Affixe d'un nombre complexe :

a) لكل عدد عقدي $z=a+ib$ ؛ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ؛ النقطة $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ تسمى **صورة** العدد العقدي z .

ونكتب $M(z)$.

b) لكل نقطة $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ؛ العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى **لحق** النقطة M ونكتب : $\boxed{z=Aff(M)}$



مثال :

1. مثل في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ؛ النقط التالية :

(a $A(2+3i)$; (c $C(2-3i)$; (e $J(i)$

(b $B(-1-2i)$; (d $I(1)$; (f $K\left(\dfrac{4}{1-i}\right)$

2. (a حدد $Aff(A')$ ؛ لحق النقطة A' مماثلة النقطة A بالنسبة لمحور الأفاصيل .

(b ماذا تلاحظ ؟

2. مصطلحات :

i. المستوى $(\mathscr{P})$ يسمى **المستوى العقدي** .

ii. محور الأفاصيل $(O,\vec{e_1})$ يسمى **المحور الحقيقي** .

iii. محور الأراتيب $(O,\vec{e_2})$ يسمى **المحور التخيلي** .

iv. لكل M و M' من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ ؛ لدينا : $\boxed{M=M'\Leftrightarrow Aff(M)=Aff(M')}$.

v. لكل z و z' من $\mathbb{C}$ ؛ لدينا : $\boxed{z=z'\Leftrightarrow M(z)=M'(z')}$.

3. لحق متجهة – الصورة المتجهية لعدد عقدي :

a) تعريف :

i. ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. المتجهة $\vec{u}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$ تسمى **الصورة المتجهية** للعدد العقدي z و نرمز لها بالرمز $\vec{u}(z)$.

ii. لتكن $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ متجهة من المستوى المتجهي ϑ_2. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى **لحق المتجهة** $\vec{u}$ ونرمز له بالرمز $z=Aff\left(\vec{u}\right)$.

مثال : 1. مثل المتجهتين $\vec{u}(2-3i)$ و $\vec{v}\left(\dfrac{-1-5i}{1-i}\right)$.

2. حدد $Aff\left(-\vec{u}\right)$ و $Aff\left(2\vec{u}\right)$.

ملاحظة :

i. لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من ϑ_2 ، لدينا : $\boxed{Aff\left(\vec{u}\right)=Aff\left(\vec{v}\right)\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}}$

ii. لكل z و z' من $\mathbb{C}$ ، لدينا : $\boxed{z=z'\Leftrightarrow\left[\vec{u}(z)=\vec{v}(z')\right]}$

b) خاصيات :

i. لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من ϑ_2 وليكن α من $\mathbb{R}$ ولتكن A و B نقطتين من $(\mathscr{P})$. لدينا :

$$Aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=Aff\left(\vec{u}\right)+Aff\left(\vec{v}\right)$$
$$Aff\left(\alpha\vec{u}\right)=\alpha Aff\left(\vec{u}\right)$$
$$Aff\left(-\vec{u}\right)=-Aff\left(\vec{u}\right)$$
$$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=Aff(B)-Aff(A)=z_B-z_A$$

ii. **لحق منتصف قطعة :**

إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ ؛ فإن: $\boxed{Aff(I)=\dfrac{Aff(A)+Aff(B)}{2}}$: أي $\boxed{z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}}$

z_A و z_B و z_I هي على التوالي ألحاق النقط A و B و I .

iii. **استقامية ثلاث نقط :**

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C ؛ حيث : $z_A\neq z_C$.

لدينا : $\left[\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}\right]\Leftrightarrow\left[A\text{ و }B\text{ و }C\text{ نقط مستقيمية}\right]$

تمرين تطبيقي 1 : نعتبر النقط $A(1-i)$ و $B(2+3i)$ و $C(3+i)$ و $A'(-1+3i)$ و $B'(3-i)$ و $C'(4+i)$.

1. بين أن : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

2. بين أن للمثلثين ABC و $A'B'C'$ نفس مركز الثقل .

تمرين تطبيقي 2 : تحقق من أن النقط $A(1+2i)$ و $B(-3-6i)$ و $C\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\right)$ نقط مستقيمية .

تمرين تطبيقي 3 : نعتبر النقط $A(1+i)$ و $B(3+2i)$ و $C(2-i)$ و $D(-2i)$.

أسئلة مستقلة :

1. أ) أنشئ النقط A و B و C و D .

ب) حدد $Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

ج) تحقق من أن $ABCD$ متوازي الأضلاع .

2. أ) أحسب $Aff\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ و $Aff\left(\overrightarrow{AC}\right)$.

ب) استنتج من جديد أن $ABCD$ متوازي الأضلاع .

3. ليكن I و J على التوالي منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[BD]$.

أ) حدد $Aff\left(I\right)$ و $Aff\left(J\right)$.

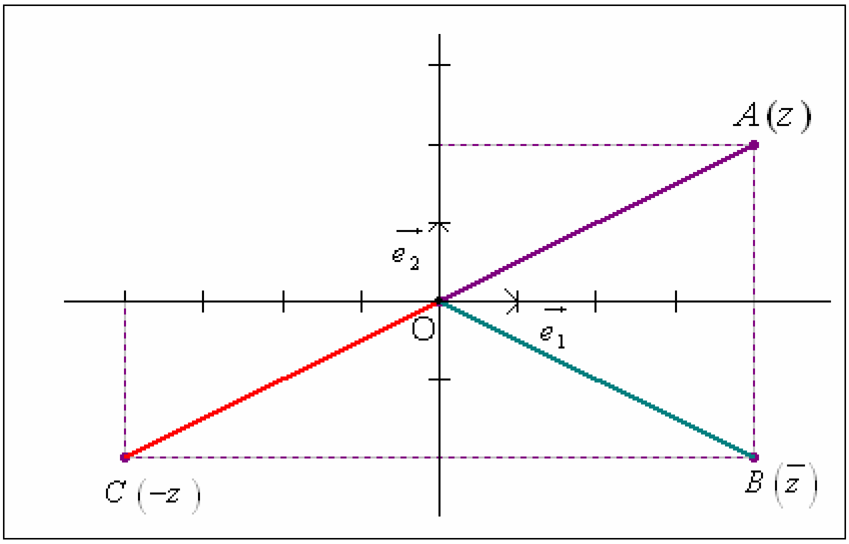
ب) تحقق من جديد أن $ABCD$ متوازي الأضلاع .

IV . مرافق عدد عقدي : Conjugué d'un nombre complexe :

1. تعريف :

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

العدد العقدي $a-ib$ يسمى **مرافق** z ويرمز له بالرمز $\overline{z}$ ونكتب: $\overline{z}=a-ib$



2. مثال : نعتبر النقطة $A(z)$ حيث $z=3+2i$.

1. مثل النقطتين $B\left(\overline{z}\right)$ و $C(-z)$.
2. أحسب العددين العقديين $z-\overline{z}$ و $z+\overline{z}$.

3. ملاحظات :

i. لكل z من $\mathbb{C}$ ، $M(z)$ و $M'\left(\overline{z}\right)$ نقطتان متماثلتان بالنسبة للمحور الحقيقي .

ii. $\boxed{\overline{\overline{z}}=z}$: $\forall z\in\mathbb{C}$

iii. $\boxed{z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z}$: $\forall z\in\mathbb{C}$

iv. $\boxed{z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z}$: $\forall z\in\mathbb{C}$

v. $\boxed{z+\overline{z}=2\Re e(z)}$: $\forall z\in\mathbb{C}$ $\qquad$ $\boxed{\Re e(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$: $\forall z\in\mathbb{C}$

$\boxed{z-\overline{z}=2i\,\Im m(z)}$: $\forall z\in\mathbb{C}$ $\qquad$ $\boxed{\Im m(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$: $\forall z\in\mathbb{C}$

4. خاصيات :

ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ ، وليكن α من $\mathbb{R}$ ، وليكن n من $\mathbb{N}^*$. لدينا :

i. $\boxed{\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}}$ و $\boxed{\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}}$ و $\boxed{\overline{\alpha.z}=\alpha.\overline{z}}$ و $\boxed{\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n}$

ii. $\boxed{z\neq0\ ,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}}$ و $\boxed{z'\neq0\ ,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$.

مثال : نضع : $z=\dfrac{3-7i}{5+i}$ و $z'=\dfrac{3+7i}{5-i}$.

1. بين أن : $z+z'\in\mathbb{R}$ (حساب $z+z'$ غير مطلوب).
2. بين أن : $z-z'\in i\mathbb{R}$ (حساب $z-z'$ غير مطلوب).

تمرين : بين أن : $(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbb{R}\quad:\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$ ؛ وأن : $(1+i)^n-(1-i)^n\in i\mathbb{R}\quad:\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$.

V – معيار عدد عقدي : Module d’un nombre complexe :

1. تعريف :

ليكن z من $\mathbb{C}$. $\left(z=a+ib\quad/\quad(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)$.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z ونرمز له بالرمز $|z|$.

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

ملاحظة 1 :

i. $\boxed{|z|=\sqrt{z\,\overline{z}}}\quad:\quad\forall z\in\mathbb{C}$.

إذا كان $z\in\mathbb{R}$ ، فإن معيار z هو القيمة المطلقة ل z .

مثال : نعتبر النقطة $A(z)$ بحيث $z=4+3i$.

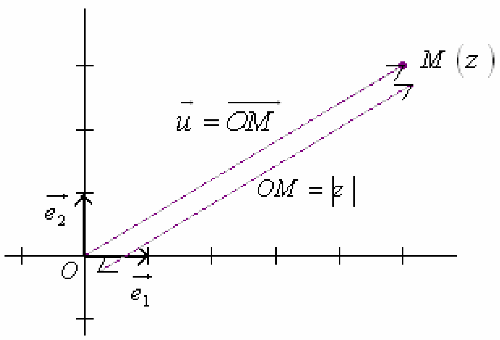
1. مثل النقطة A .
2. أحسب $|z|$.
3. a) مثل النقطتين $B\left(\overline{z}\right)$ و $C(-z)$.

b) أحسب : $\left|\overline{z}\right|$ و $|-z|$.

2. التأويل الهندسي :

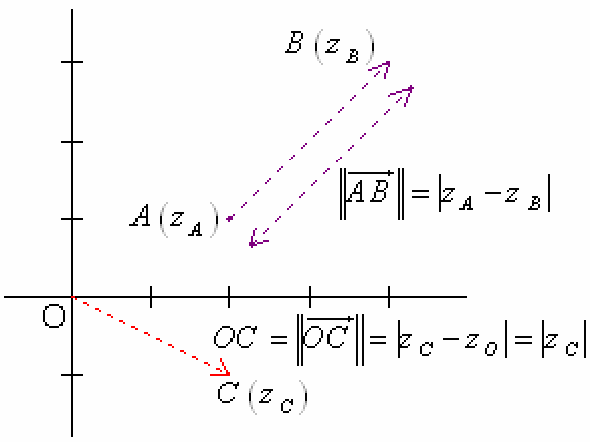
a) خاصية :

ليكن z عددا عقديا صورته M . لدينا : $\boxed{|z|=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$.



b) ملاحظة 2 :

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad:\quad\boxed{|z|=\left|\overline{z}\right|=|-z|}$$



c) خاصية :

نعتبر نقطتين $A(z_A)$ و $B(z_B)$ من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$.

لدينا : $\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|}$

3. خاصيات :

.i $\forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad \boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$	.v $\forall z \in \mathbb{C}^*; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad \boxed{|z^n| = |z|^n}$
.ii $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad : \quad \boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$	.vi $\forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad \boxed{|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}}$
.iii $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad : \quad \boxed{\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{|z|}}$	.vii $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad : \quad \boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$
.iv $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad : \quad \boxed{\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$	.viii $\forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad \boxed{|\Re e(z)| \leq |z|} \quad \boxed{|\Im m(z)| \leq |z|}$

ملاحظة :

✓ عموما : $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$.

✓ إذا كان $\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$ فإن : $AB = AC$.

4. تطبيقات :

مثال : نعتبر في المستوى العقدي ، النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$ حيث : $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 4-i$.

حدد هندسيا ثم جبريا :

1. مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - 2 - i| = 4$.
2. مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - 2 - i| = |z - 4 + i|$.

استنتاج :

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ ، وليكن $R \in]0, +\infty[$.

✓ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - a| = R$ هي الدائرة $C(A, R)$ التي مركزها A وشعاعها R.

✓ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - a| = |z - b|$ هي واسط القطعة $[AB]$.

تمرين تطبيقي : نضع : $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i, i\} \quad : \quad P(z) = \frac{5z}{z^2 + 1}$

1. حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ التي تحقق $P(z) \in \mathbb{R}$.
2. حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ التي تحقق $P(z) \in i\mathbb{R}$.

VI– عمدة عدد عقدي غير منعدم: Argument d'un nombre complexe non nul

1. مثال :

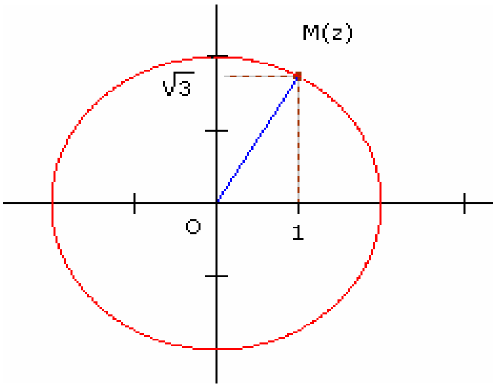
لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي لحقها $z = 1 + i\sqrt{3}$.

a. أكتب z على الشكل $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ مع $\theta \in]-\pi, \pi]$.

b. مثل M في المعلم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ مستعملا r و θ .

الزوج (r, θ) يسمى زوج الاحداثيتين القطبيتين للنقطة M .

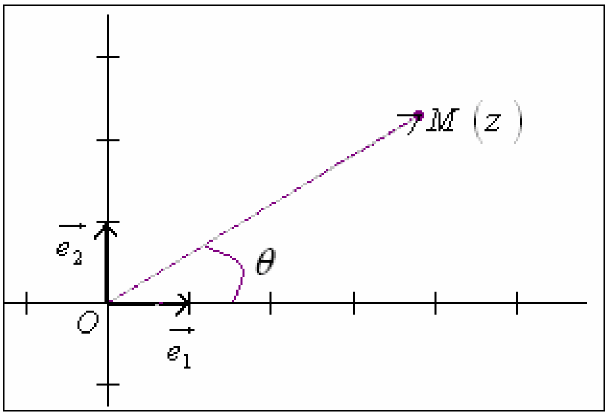
$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

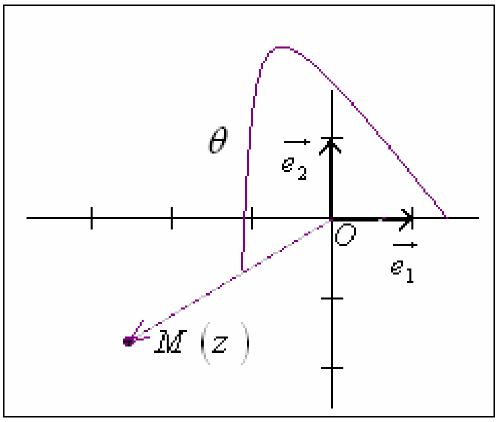


العدد $\frac{\pi}{3}$ يسمى عمدة للعدد العقدي الغير المنعدم $z=1+i\sqrt{3}$.

2. تعريف :

ليكن z من $\mathbb{C}^*$ صورته M في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$. نسمي عمدة z كل قياس للزاوية الموجهة $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})$.
ونرمز له بالرمز $\arg(z)$ ونكتب : $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})=\arg(z)+2k\pi \quad / \quad k\in\mathbb{Z}$. أي : $\boxed{(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})\equiv\arg(z)\quad[2\pi]}$





ملاحظة : في المثال 1 ؛ لدينا : $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

مثال 2 : مثل النقط $A(2)$ و $B(2i)$ و $C(-i)$ و $D(-3)$. ثم استنتج عمدة لكل من ألحاقها .

3. الشكل ألمثلثي لعدد عقدي غير منعدم : Forme trigonométrique d'un complexe :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ ؛ حيث :
$r=|z|$ و $\theta\equiv\arg(z)\quad[2\pi]$.
هذه الكتابة تسمى الشكل ألمثلثي ل z ونكتب: $\boxed{z=[r,\theta]}$.

$$\boxed{z=[r,\theta]\iff z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\quad/\quad r=|z|\quad;\quad\theta\equiv\arg(z)\quad[2\pi]}$$

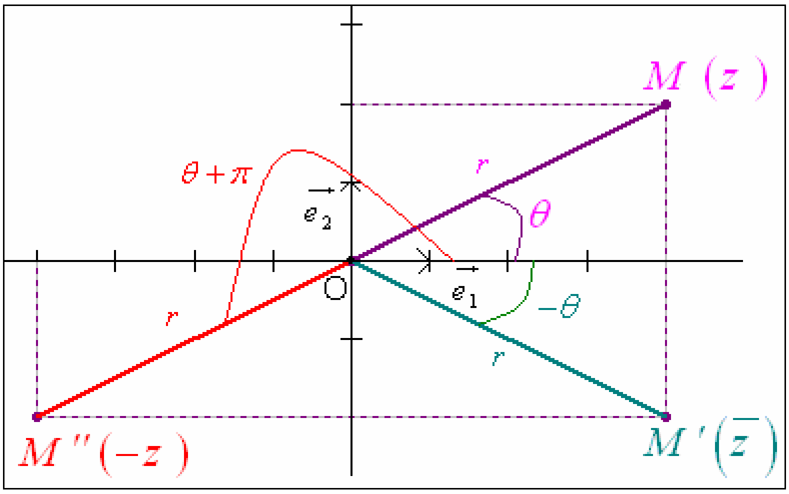
مثال : حدد الشكل ألمثلثي لكل من الأعداد العقدية التالية :

$$z_4=\frac{1}{i}\quad;\quad z_3=\frac{1}{7}i\quad;\quad z_2=2\sqrt{3}+2i\quad;\quad z_1=4+4i$$

ملاحظة : $\boxed{[r,\theta]=[r',\theta']\iff r=r' \text{ و } \theta\equiv\theta'\quad[2\pi]}$

4. الشكل ألمثلثي ل $\bar{z}$ و $-z$:

ليكن $z=[r,\theta]$. لدينا :
$\bar{z}=[r,-\theta]$ و $-z=[r,\theta+\pi]$.



وبتعبير آخر :

$$|-z|=|z| \quad \text{و} \quad \arg(-z)\equiv\arg(z)+\pi \quad [2\pi]$$
$$|\bar{z}|=|z| \quad \text{و} \quad \arg(\bar{z})\equiv-\arg(z) \quad [2\pi]$$

5. خاصيات :

ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ ؛ وليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا :

$\boxed{\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')\quad[2\pi]}$ $\boxed{\arg(z^n)\equiv n\arg(z)\quad[2\pi]}$

$\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\quad[2\pi]}$ $\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\quad[2\pi]}$

الخاصيات السابقة للمعيار والعمدة تكتب كذلك كما يلي :

(a $\boxed{[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']}$ (c $\boxed{\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]}$ (e $\boxed{\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]}$

(b $\boxed{[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]}$ (d $\boxed{\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]}$ (f $\boxed{-[r,\theta]=[r,\theta+\pi]}$

مثال : ليكن $z=1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $z'=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$.

i. أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد العقدية التالية :
$\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$ و $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$.

ii. تحقق من أن : $-4z'^8+z^6=0$.

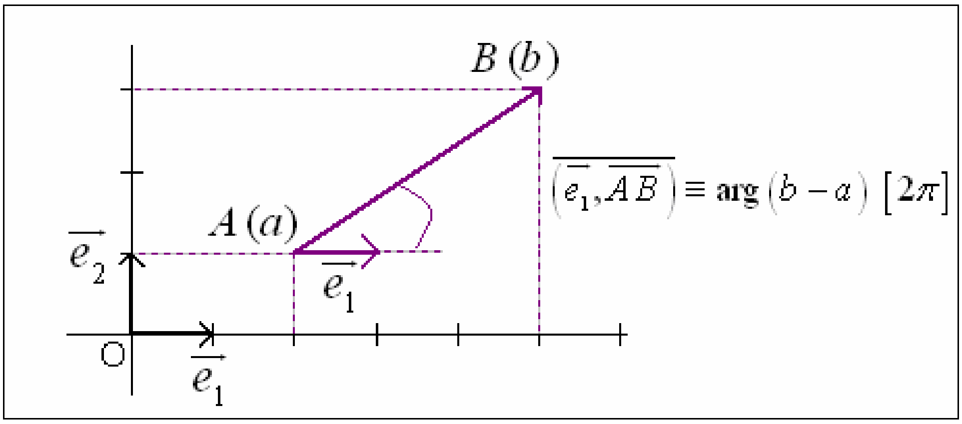
iii. أعط الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية :
$-1+i$ و $-1-i$ و $1-i$ و $-1+i\sqrt{3}$ و $-1-i\sqrt{3}$ و $1-i\sqrt{3}$.

6. زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي :

a) عمدة لحق متجهة :

مثال تمهيدي : لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$.

1. أنشئ النقطة C بحيث $OABC$ متوازي الأضلاع .
2. تحقق من أن : $Aff\,(C)=b-a$.
3. استنتج أن : $\overline{(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB})}\equiv\arg(b-a)$.



خاصية 1 : لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$. لدينا : $\boxed{\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a) \quad [2\pi]}$

خاصية 2 :

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$. لدينا :

$$\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]}$$

برهان : لدينا :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\vec{e}_1}\right) + \left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\arg(b-a) + \arg(c-a) \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

تمرين تطبيقي : نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $S(s)$ التي ألحاقها على التوالي :

$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $s = i$.

1) أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{a-s}{b-s}$.

2) استنتج أن المثلث SAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في S .

3) بين أن الرباعي $OASB$ مربع .

VII- صيغة موافر : Formule de Moivre :

1. خاصية : $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

2. مثال : 1. أحسب $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2$ بطريقتين مختلفتين .

2. استنتج صيغ تحويل $\cos(2\theta)$ و $\sin(2\theta)$.

الجواب :

1. لدينا : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)$.

وحسب صيغة موافر ؛ لدينا : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$.

2. حسب خاصية تساوي عددين عقديين؛ لدينا :

$\boxed{\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}$ و $\boxed{\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)}$

مثال : أعط ؛ بنفس الطريقة ؛ صيغ تحويل $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$.

$$\boxed{\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^3}$$

استعمال المتطابقات الهامة

$$\boxed{\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)+i\left(3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\right)}$$

استعمال صيغة موافر

$$\boxed{\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)}$$

ومنه نستنتج أن : $\boxed{\cos(3\theta)=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}$ و $\boxed{\sin(3\theta)=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)}$

VIII- الترميز الأسي : Notation Exponentielle :

1. تعريف :

ليكن θ عددا حقيقيا .نرمز للعدد العقدي $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ بالرمز $e^{i\theta}$.

ملاحظة : $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\quad;\quad e^{i\theta}=[1,\theta]=\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

2. مثال : أكتب على الشكل $e^{i\theta}$ مايلي : -1 و $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و i و 1 و $2+2i$.

3. خاصية : $\boxed{\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2\quad;\quad e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}}$

4. الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم :

خاصية :

لكل عدد عقدي غير منعدم z ؛ معياره r و θ عمدة له ؛ لدينا :

$\boxed{z=[r,\theta]=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=re^{i\theta}}$.

الكتابة $z=re^{i\theta}$ تسمى الكتابة الأسية للعدد العقدي z .

مثال : لدينا : $5+5i\sqrt{3}=10\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\boxed{10e^{i\frac{\pi}{3}}}$

5. خاصيات :

✓ إذا كان $z=[r,\theta]=re^{i\theta}$ ؛ وكان $n\in\mathbb{N}$ فإن :

$\boxed{z^n=r^ne^{in\theta}}$, $\boxed{\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}}$, $\boxed{-z=re^{i(\pi+\theta)}}$, $\boxed{\overline{z}=re^{-i\theta}}$

✓ إذا كان $z=[r,\theta]=re^{i\theta}$ و $z'=[r',\theta']=r'e^{i\theta'}$ ؛ فإن :

$\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$, $\boxed{zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}}$

مثال : أعط الكتابة الأسية لكل من الأعداد العقدية التالية : $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$ و $(1+i)(-\sqrt{3}-i)$ و $-j$.

Formules d'Euler – Linéarisation : 6. صيغتا أولير- صيغ الإخطاط :

خاصية :
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad : \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad , \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

تطبيق : بين ؛ باستعمال صيغتا أولير ؛ أن : $\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$ و $\boxed{\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$.

الجواب : لدينا :

$$\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2}\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

$$\sin^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{-4} = -\frac{1}{2}\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

تمرين : أعط ؛ بنفس الطريقة ؛ صيغتي إخطاط $\cos^3(\theta)$ و $\sin^3(\theta)$.

الجواب :

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4}\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}+\frac{3}{4}\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{1}{4}\cos(\theta) = \boxed{\frac{\cos(3\theta)+\cos(\theta)}{4}}$$

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i} = -\frac{1}{4}\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}+\frac{3}{4}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin(\theta) = \boxed{\frac{-\sin(3\theta)+3\sin(\theta)}{4}}$$

Les racines n ème : IX- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

1. تعريف :

ليكن u عددا عقديا غير منعدم ؛ وليكن n من $\mathbb{N}$ $(n \geq 2)$.
كل عدد عقدي z يحقق $z^n = u$ يسمى **جذر نوني** ل u

مثال : لدينا : $i^2 = -1$ و $(-i)^2 = -1$. العددان العقديان i و $-i$ جذران مربعان للعدد العقدي -1 .

لدينا : $(1+i)^2 = 2i$ و $(-1-i)^2 = 2i$.

العددان العقديان $1+i$ و $-1-i$ جذران مربعان للعدد العقدي $2i$.

لدينا : $j^3 = 1$. العدد العقدي j جذر مكعب للعدد العقدي 1 .

2. تحديد الجذور النونية :

أ- **مثال تمهيدي :** نعتبر المتتالية العددية $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{12} \\ \alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\pi}{3} \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

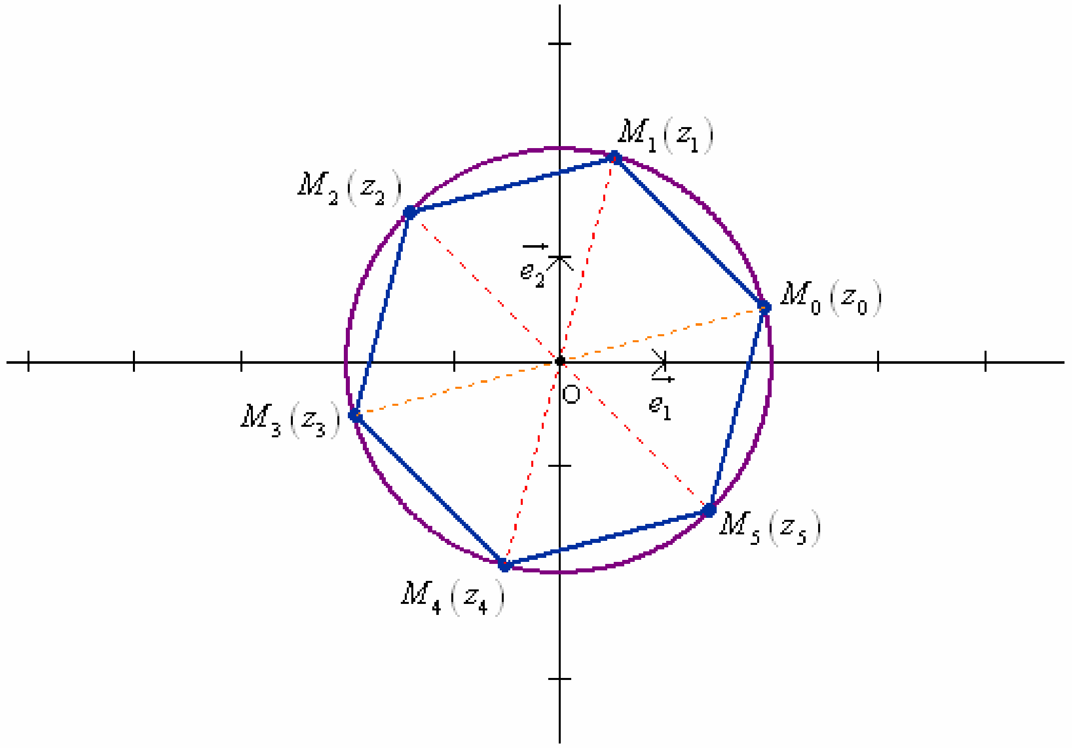
لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ نعتبر النقطة M_k التي لحقها $[2,\alpha_k]$. ليكن : $u = 64e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1) مثل النقط M_0 و M_1 و . . . و M_5 .

2) a) ليكن z_k لحق النقطة M_k . بين أن : $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\right)}$.

b) استنتج أن لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ لدينا : $z_k^6 = u$.

الحل : 1) لدينا :



نجد أن $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ هو مسدس منتظم محاط بالدائرة التي مركزها O و شعاعها 2 .

2) a) لدينا :

$$z_0 = [2,\alpha_0] = \left[2,\frac{\pi}{12}\right] = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_1 = [2,\alpha_1] = \left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_2 = [2,\alpha_2] = \left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} \quad ; \quad z_3 = [2,\alpha_3] = \left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{3}\right)}$$

$$z_4 = [2,\alpha_4] = \left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} \quad ; \quad z_5 = [2,\alpha_5] = \left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}\right)}$$

b) ليكن $k \in \mathbb{N}$. لدينا :

$$z_k^6 = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}\right)^6 = 2^6 e^{i6\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)} = 64e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = u$$

الأعداد العقدية z_0 و z_1 و z_2 و z_3 و z_4 و z_5 تسمى الجذور السادسة للعدد العقدي u .

ب- خاصية :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. كل عدد عقدي غير منعدم $u = [r,\theta] = re^{i\theta} = r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ يقبل n جذرا نونيا . $z_k = \left[\sqrt[n]{r},\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ حيث : $0 \le k \le n-1$

ملاحظة :

الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم u هي حلول المعادلة $z^n = u$.

مثال : الجذور السادسة للعدد العقدي $u=\left[64,\frac{\pi}{2}\right]$ هي :

$\boxed{z_k=\left[\sqrt[6]{64},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{6}\right]=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right]}$ حيث : $0\le k\le 5$.

$$z_0=\left[2,\frac{\pi}{12}\right]=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_1=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{5\pi}{12}\right]=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_2=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{3\pi}{4}\right]=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$z_3=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{13\pi}{12}\right]=2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_4=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{17\pi}{12}\right]=2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_5=\left[2,\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{21\pi}{12}\right]=\left[2,\frac{7\pi}{4}\right]=\left[2,2\pi-\frac{\pi}{4}\right]=\left[2,-\frac{\pi}{4}\right]=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

3. صور الجذور النونية :

خاصية :

الصور M_0 و M_1 و . . . و M_{n-1} للجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم u هي رؤوس مضلع منتظم ل n ضلعا ومحاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$ حيث $r=|u|$. ولدينا :

$\boxed{\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad:\quad\left\|\overrightarrow{OM_k}\right\|=|z_k|=\sqrt[n]{r}}$ و $\boxed{\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad:\quad\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\equiv\frac{2\pi}{n}\quad[2\pi]}$

برهان : ليكن $u=[r,\theta]$. لدينا : $0\le k\le n-1$ ، $z^n=u\Leftrightarrow z_k=\left[\sqrt[n]{r},\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]$

ليكن $0\le k\le n-1$ ؛ لدينا : $OM_k=\left\|\overrightarrow{OM_k}\right\|=|z_k|=\sqrt[n]{r}$. إذن : $M_k\in C\left(O,\sqrt[n]{r}\right)$.

ولدينا :
$$\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right)\quad[2\pi]$$
$$\equiv\arg\left(z_{k+1}\right)-\arg\left(z_k\right)\quad[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\theta}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-\frac{\theta}{n}-\frac{2k\pi}{n}\quad[2\pi]$$
$$\boxed{\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\equiv\frac{2\pi}{n}\quad[2\pi]}$$

مثال : الجذور المكعبة للعدد العقدي $u=8i=\left[8,\frac{\pi}{2}\right]$ هي :

$0\le k\le 2$; $z_k=\left[\sqrt[3]{8},\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right]$.

$$z_0=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{\sqrt{3}+i}$$

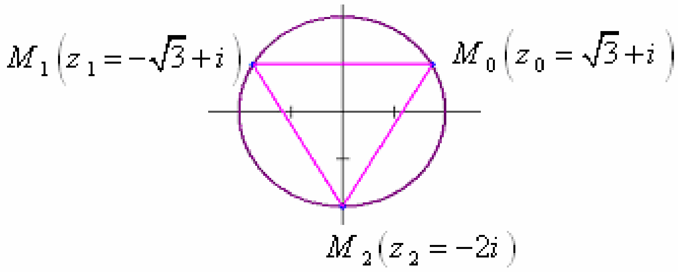
$$z_1=\left[2,\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{5\pi}{6}\right]=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{-\sqrt{3}+i}$$

$$z_2=\left[2,\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{3\pi}{2}\right]=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=2(0-i)=\boxed{-2i}$$

لدينا $M_0\left(z_0=\sqrt{3}+i\right)$ و $M_1\left(z_1=-\sqrt{3}+i\right)$ و $M_2\left(z_2=-2i\right)$ هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

ولدينا : $OM_0=OM_1=OM_2=2$

و $\left(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_1}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_3}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$



4. الجذور النونية للوحدة :

> للعدد العقدي 1 ؛ n جذرا نونيا : $z_k=\left[1,\frac{2k\pi}{n}\right]=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ حيث : $0\le k\le n-1$
>
> وهي حلول المعادلة : $z^n=1$.

مثال : $\boxed{n=2}$: الجذرين المربعين للوحدة هما : -1 و 1 .

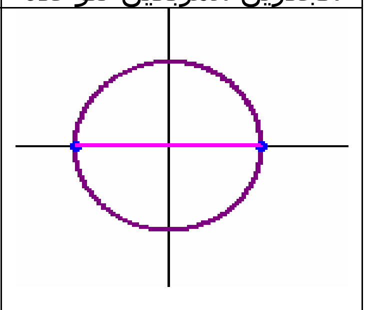
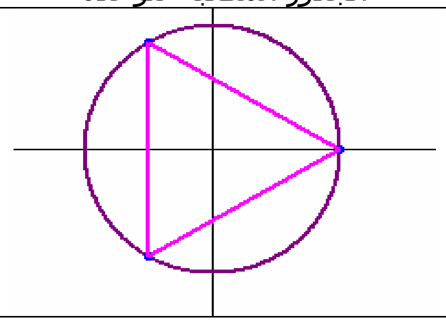
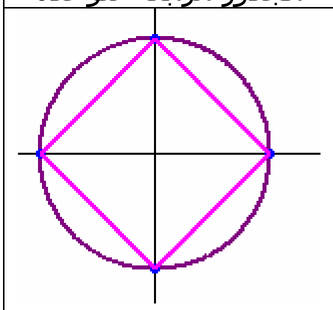
$\boxed{n=3}$: الجذور المكعبة للوحدة هي : $z_k=\left[1,\frac{2k\pi}{3}\right]=e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ حيث : $0\le k\le 2$. أي :

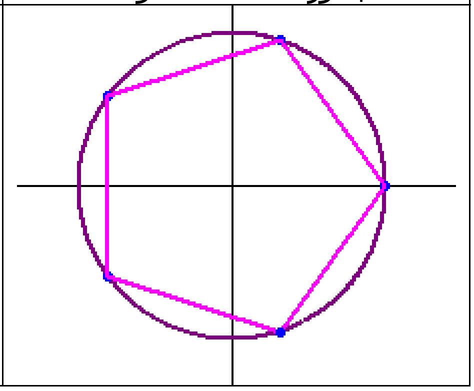
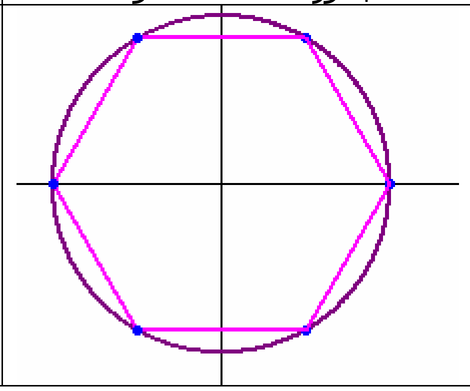
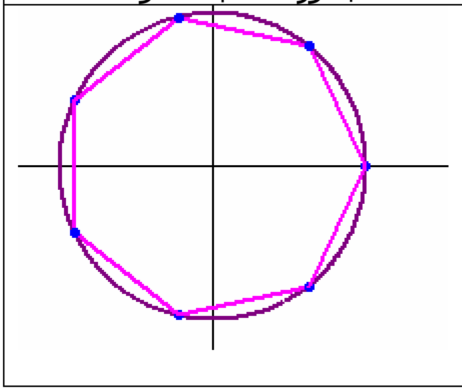
$z_0=1$ و $z_1=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\left[1,\frac{4\pi}{3}\right]=j^2=\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{n=4}$: الجذور الرابعة للوحدة هي: 1 و -1 و i و $-i$.

خاصية :

> M_0 و M_1 و . . . و M_{n-1} **صور الجذور النونية** للوحدة هي رؤوس **مضلع منتظم** ل n ضلعا ومحاطا بالدائرة المثلثية .

الجذرين المربعين للوحدة	الجذور المكعبة للوحدة	الجذور الرابعة للوحدة
		

الجذور الخامسة للوحدة	الجذور السادسة للوحدة	الجذور السابعة للوحدة
		

VIII- المعادلات من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$:

1. الجذرين المربعين لعدد عقدي غير منعدم :

مثال 1: الجذرين المربعين لعدد حقيقي موجب قطعا x هما : $\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$.

مثال 2: الجذرين المربعين لعدد حقيقي سالب قطعا $-x$ هما : $\sqrt{x}.i$ و $-\sqrt{x}.i$.

مثال 3: الجذرين المربعين للعدد الحقيقي 3- هما : $\sqrt{3}.i$ و $-\sqrt{3}.i$.

مثال 4: الجذرين المربعين لعدد عقدي تخيلي صرف ib حيث $(b>0)$ هما :

$$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i) \text{ و } -\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i) .$$

الجذرين المربعين للعدد العقدي $8i$ هما : $\sqrt{\frac{8}{2}}(1+i)=\boxed{2(1+i)}$ و $-\sqrt{\frac{8}{2}}(1+i)=\boxed{-2(1+i)}$.

مثال 5 : الجذرين المربعين لعدد عقدي تخيلي صرف ib حيث $(b<0)$ هما :

$$\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i) \text{ و } -\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i) .$$

الجذرين المربعين للعدد العقدي $-8i$ هما : $\sqrt{\frac{8}{2}}(1-i)=\boxed{2(1-i)}$ و $-\sqrt{\frac{8}{2}}(1-i)=\boxed{-2(1-i)}$.

الحالة العامة :

أ- طريقة الشكل المثلثي :

الجذرين المربعين لعدد عقدي غير منعدم $u=[r,\theta]$ هما : $z_k=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}+k\pi\right]$ حيث $0\le k\le 1$.

أي: $z_0=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]$ و $z_1=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}+\pi\right]=-z_0$.

مثال : ليكن $\left[4,\frac{\pi}{3}\right]=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=u=2+2i\sqrt{3}$.

الجذرين المربعين للعدد العقدي u هما :

$z_k=\left[\sqrt{4},\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{2}\right]=\left[2,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ حيث : $0\le k\le 1$.

أي :

$$z_0=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{\sqrt{3}+i}$$

و

$$z_1=\left[2,\frac{\pi}{6}+\pi\right]=-z_0=\boxed{-\sqrt{3}+i-}$$

ب- الطريقة الجبرية :

مثال : حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $u=8+6i$.

الحل : ليكن $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ جذرا مربعا للعدد العقدي u . إذن : $z^2=u$.

لدينا : $a^2+b^2=|z|^2=|z^2|=|u|=|8+6i|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$. إذن : $x^2+y^2=10$.

ومنه فإن :

$$z^2=u \Leftrightarrow (x+iy)^2=8+6i$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=8+6i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

وبما أن $x^2+y^2=10$ فإن الزوج (x,y) يحقق :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy = 3>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=\boxed{3+i} \vee z=\boxed{-3-i}$$

الحالة العامة: ليكن $u=a+ib$ عددا عقديا حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. وليكن $z=x+iy$ ؛ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ؛ جذرا مربعا ل u . إذن : $z^2=u$. ولدينا : $x^2+y^2=|z|^2=|z^2|=|u|=\sqrt{a^2+b^2}$.

ومنه فإن : $\boxed{x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}}$. وعليه فإن :

$$z^2=u \Leftrightarrow (x+iy)^2=a+ib$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=a+ib$$

$$z^2=u \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

وبما أن : $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ ؛ فإن الزوج (x,y) يحقق ما يلي :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = a+\sqrt{a^2+b^2} \\ 2y^2 = -a+\sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ 2xy = b \end{cases}$$

✓ إذا كان $b>0$ فإن $2xy=b$ يستلزم كون x و y من نفس الإشارة . إذن الجذرين المربعين للعدد العقدي u هما : $z_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$ و $z_2=-z_1$.

✓ إذا كان $b<0$ فإن $2xy=b$ يستلزم كون x و y لهما إشارتين مختلفتين . إذن الجذرين المربعين للعدد العقدي u هما : $z_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$ و $z_2=-z_1$.

خاصية :

كل عدد عقدي غير منعدم له جذران مربعان مختلفان ومتقابلان

مثال : أحسب بطريقتين مختلفتين الجذرين المربعين للعدد العقدي $u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ ثم استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

2. المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) \quad : \quad az^2+bz+c=0$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$ و $(b,c)\in\mathbb{C}^2$.

لدينا : $$az^2+bz+c=a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

إذن : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ حيث : $\Delta=b^2-4ac$.

ليكن δ جذرا مربعا للعدد العقدي Δ إذن : $\delta^2=\Delta$.

ومنه فإن : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right]=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)$.

إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما : $\alpha=\frac{-b+\delta}{2a}$ و $\beta=\frac{-b-\delta}{2a}$.

إذا كان $\Delta=0$ فإن للمعادلة (E) حل وحيد $\alpha=\frac{-b}{2a}$.

مثال : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) \quad : \quad z^2-\left(\sqrt{3}-i\right)z-2+2i\sqrt{3}=0$

و z_1 و z_2 حلي (E) بحيث : $\Im m\left(z_2\right)>0$.

1. أنشر $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$.
2. حدد z_1 و z_2 .
3. أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . ب- أحسب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2005}$.

تمرين تطبيقي 1:

1. نعتبر العدد العقدي u بحيث : $u = 2 - 2\sqrt{3}i$. حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي u .
2. نعتبر المعادلة (E) التالية : $(E) \quad : \quad z^2 + \left(\sqrt{3} + 7i\right)z - 4\left(3 - \sqrt{3}i\right) = 0$.

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $\Re e(z_1) < \Re e(z_2)$.

حدد على الشكل الجبري العددين العقديين z_1 و z_2 .

3. المستوى العقدي $(\wp)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

أ. تحقق من أن : $4(z_1 + 2i) = u(z_2 + 2i)$.

ب. نعتبر في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ ؛ النقط : $A(-2i)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$.

حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ بترديد 2π.

جـ. بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

د. أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\dfrac{z_2}{z_1}$.

هـ. استنتج الشكل الجبري للعدد العقدي $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^6$.

و . بين أن النقط O و $M_1\left(z_1^6\right)$ و $M_2\left(z_2^6\right)$ مستقيمية .

ز. حدد (D) ؛ مجموعة النقط $M(z)$ ؛ التي تحقق : $|z - z_1| = |\bar{z} - \bar{z_2}|$.

ح. حدد (D') ؛ مجموعة النقط $M(z)$ ؛ التي تحقق : $|z - z_1| = |iz - iz_2|$.

تمرين تطبيقي 2 :

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ حيث : $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 4cm$.

لتكن B النقطة ذات اللحق i ولتكن M_1 النقطة ذات اللحق $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$.

1. حدد معيار وعمدة للعدد العقدي z_1 .
2. لتكن M_2 النقطة ذات اللحق z_2 حيث M_2 هي صورة النقطة M_1 بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

حدد معيار وعمدة للعدد العقدي z_2 ؛ وبين أن النقطة M_2 تنتمي إلى المستقيم (D) الذي معادلة ديكارتية له هي $y = x$.

3. لتكن M_3 النقطة ذات اللحق z_3 حيث M_3 هي صورة النقطة M_2 بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3} + 2$.

أ- بين أن : $z_3 = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 + i)$.

ب- بين أن النقطتين M_1 و M_3 تنتميان إلى الدائرة التي مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$.

4. باستعمال المسطرة و المزواة ؛ أنشئ النقط M_1 و M_2 و M_3.

(حدد مراحل الإنشاء معتمدا على الأسئلة السابقة)

5. نربط كل نقطة $M(z)$ ؛ مخالفة للنقطة B ؛ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = \dfrac{1}{i - z}$.

حدد وأنشئ (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى $(\mathscr{P})$ المحروم من النقطة B ؛ بحيث $M'(z')$ تنتمي إلى الداءرة التي مركزها O وشعاعها 1.

تمرين تطبيقي 3 :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. لتكن $B(-i)$ نقطة.

نضع : $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\} : \quad u = \dfrac{2z - 1}{z + i}$.